Question de cours 1. Définition de valeur propre, vecteur propre et sous-espace propre d'un endomorphisme. Définition du polynôme caractéristique et lien avec les définitions précédentes.

Exercice 2. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et f définie par :

$$\forall P \in E, \qquad f(P) = (X^2 - 1)P' - 2XP$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E et déterminer sa matrice dans la base canonique de E.
2. f est-il diagonalisable ?

Correction 1. 1. endo les x^3 sautent. Morphisme à rédiger.

$$mat_{b_can}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. $\chi_f(X) = X(X-2)(X+2)$

Exercice 3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $A_\alpha \in M_3(\mathbb{R})$ la matrice suivante

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \alpha + 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

1. Factoriser le polynôme caractéristique $P_{A_\alpha}(X)$ en produit de facteurs du premier degré.
2. Déterminer selon la valeur du paramètre α les valeurs propres distinctes de A_α et leur multiplicité.
3. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles la matrice A_α est diagonalisable.

Question de cours 4. Définition d'un endomorphisme diagonalisable, et condition suffisante de diagonalisibilité en lien avec le polynôme caractéristique.

Exercice 5. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. A quelle(s) condition(s) sur a, la matrice M est-elle diagonalisable.
2. Dans ce cas, la diagonaliser puis calculer M^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Correction 2. 1. On effectue l'opération élémentaire $L_2 \leftarrow L_2 + L_3$, ce qui permet de mettre $X - 1$ en facteur dans χ_M et on obtient alors :

$$\chi_M(X) = (X-1)^2(X-2).$$

• χ_M est scindé sur $\mathbb{R}$. • Puisque 2 est une valeur propre de multiplicité 1, le sous-espace propre associé, $E_2(M)$, est de dimension 1. • Puisque 1 est valeur propre de multiplicité 2, la matrice M est alors diagonalisable si et seulement si $E_1(M)$ est de dimension 2.

En utilisant le théorème du rang, on a :

$$\begin{aligned}
\dim\big(E_1(M)\big) = 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad \operatorname{rg}(I_3 - M) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & a & a \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \\
&\Longleftrightarrow \quad \text{toutes les colonnes de } M - I_3 \text{ sont proportionnelles} \\
&\Longleftrightarrow \quad \exists(\lambda, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} a \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&\Longleftrightarrow \quad a = 0.
\end{aligned}$$

La matrice M est diagonalisable si et seulement si $a = 0$.

2. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}$.

   - *Recherche d'une base de* $E_1(M)$. On a :

$$X \in E_1(M) \quad \Longleftrightarrow \quad (M - I_3)X = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x - z = 0.$$

   On pose $X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; on définit ainsi deux vecteurs de $E_1(M)$ non colinéaires. La famille (X_1, X_2) est libre dans $E_1(M)$, de cardinal $2 = \dim\big(E_1(M)\big)$: c'est une base de $E_1(M)$.

   - *Recherche d'une base de* $E_2(M)$. On a :

$$X \in E_2(M) \quad \Longleftrightarrow \quad (M - 2I_3)X = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} y + z = 0 \\ x = 0 \end{array} \right. .$$

   Posons $X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, X_3 est un vecteur de $E_2(M)$ non nul et puisque $E_2(M)$ est de dimension 1 on a : $E_2(M) = \mathrm{Vect}(X_3)$.

   - Soit $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, cette matrice est inversible ; en effet les colonnes de P sont des vecteurs propres de M formant une base de chaque sous-espace propre de M. De plus on a :

$$P^{-1}MP = \Delta = \mathrm{diag}(1, 1, 2).$$

   - Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$M^n = \big(P\Delta P^{-1}\big)^n = \underbrace{P\Delta(P^{-1}P)\Delta \cdots (P^{-1}P)\Delta P^{-1}}_{n \text{ fois}} = P\Delta^n P^{-1}.$$

   Pour déterminer M^n, il reste à déterminer P^{-1}. Pour cela, on inverse le système $PX = Y$ soit

$$\left\{ \begin{array}{ll} y & = a \\ x + z & = b \\ y - z & = c \end{array} \right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ll} x & = -a + b + c \\ y & = a \\ z & = a - c \end{array} \right. .$$

   On en déduit $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, puis que

$$M^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2^n \\ 0 & 1 & -2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 + 2^n & 1 & 1 - 2^n \\ 1 - 2^n & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. Soit $a \in \mathbb{R}$ et A la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 1 + a \end{pmatrix}.$$

On définit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, par la donnée de u_0 et u_1 et la relation de récurrence suivante pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+2} = (1 + a)u_{n+1} - au_n$.

1. Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Lorsque A est diagonalisable, calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. On suppose A diagonalisable. On note U_n le vecteur $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$. Déterminer U_n en fonction de n.

Question de cours 7. Ordre de multiplicité d'une valeur propre, comparaison entre l'ordre de multiplicité et la dimension du sous-espace propre associé.

Exercice 8. On veut calculer les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = -3u_n + v_n + 3w_n \\ v_{n+1} = -4u_n + v_n + 4w_n \\ w_{n+1} = -2u_n + v_n + 2w_n \end{cases} .$$

Exprimer u_n , v_n et w_n en fonction de n, u_0 v_0 et w_0.
Indication : on écrira le système ci-dessous sous forme matricielle puis on diagonalisera la matrice du système.

Correction 3. $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^{2k} = A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{2k-1} = A$$

$$\begin{cases} u_{2k} = -u_0 + v_0 + w_0 \\ v_{2k} = v_0 \\ w_{2k} = -2u_0 + v_0 + 2w_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} u_{2k+1} = -3u_0 + v_0 + 3w_0 \\ v_{2k+1} = -4u_0 + v_0 + 4w_0 \\ w_{2k+1} = -2u_0 + v_0 + 2w_0 \end{cases}$$

Les suites d'indice pair et impair étant constantes, ces trois suites sont convergentes si et seulement si les termes d'indice pair et impair sont égaux, c'est-à-dire que u_0, v_0 et w_0 sont solutions du système suivant :

$$\begin{cases} -3u_0 + v_0 + 3w_0 & = -u_0 + v_0 + w_0 \\ -4u_0 + v_0 + 4w_0 & = v_0 \\ -2u_0 + v_0 + 2w_0 & = -2u_0 + v_0 + 2w_0 \end{cases}$$

c'est-à-dire après simplification $u_0 = w_0$.

Les trois suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes si et seulement $u_0 = w_0$.
Dans ce cas, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = v_n = w_n = v_0$ et donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = v_0$

Exercice 9. Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la matrice :

$$A_a = \begin{pmatrix} 3-a & a-5 & a \\ -a & a-2 & a \\ 5 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Montrer que A_a est diagonalisable.

Exercice 10. Soient $E = \mathbb{R}_n[X]$ et deux réels $a \neq b$. Pour $P \in E$, on pose :

$$\varphi(P) = (X-a)(X-b)P' - nXP$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de E.
2. Écrire la matrice de φ dans la base :

$$\mathscr{B} = \left(1, X-a, (X-a)^2, \ldots, (X-a)^n\right).$$

3. Déterminer les valeurs propres de φ.
4. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

Exercice 11. Soient $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. On considère l'application u définie sur $E = \mathbb{R}_n[X]$, par :

$$\forall P \in E, u(P) = (X^2 - X)P(1) + (X^2 + X)P(-1).$$

1. Justifier que u est un endomorphisme de E.

2. Seulement dans cette question, on prend $n = 2$.
   Écrire la matrice de u relativement à la base $(1, X, X^2)$ et sans calculs, répondre aux questions suivantes :
   (a) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(u)$ et une base de $\mathrm{Im}(u)$.
   (b) L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
   (c) Déterminer les éléments propres de u.

   On revient au cas général.
3. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(u)$ et une base de $\mathrm{Im}(u)$.
4. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de u.
5. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

Correction 4. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$